01. Seis irmãos conversavam quando um deles, Matias, enunciou: a soma das idades de todos nós é cinco vezes a minha idade atual e sou seis anos mais novo que Sófocles. Quando Sófocles tiver três vezes a minha idade atual, constataremos que:
- a soma da minha idade com a de Dâmocles será igual à soma da idade atual dos irmãos de César;
- a idade de Erastóstenes será três vezes a idade dele atual; e
- a idade do Lutero será duas vezes a idade atual do Sófocles, mais um ano.

Diante do exposto, qual é a soma das idades atuais de Sófocles e Matias?

Solução:

Os seis irmãos são: Matias, Sófocles, Dâmocles, César, Erastóstenes e Lutero.

Sejam m, s, d, c, e e ℓ suas idades atuais, respectivamente.

Os dados iniciais do enunciado são:

$$\begin{cases} m+s+d+c+e+\ell = 5m \\ s-m=6 \end{cases}$$

Depois Matias fala sobre “quando Sófocles tiver três vezes a minha idade atual”, ou seja, Matias fala sobre um cenário que se dará no futuro, daqui a “$3m-s$” anos. Levando em conta essa data futura, temos mais essas informações:

$$\begin{cases} [m+(3m-s)]+[d+(3m-s)] = m+s+d+e+\ell \\ [e+(3m-s)] = 3e \\ [\ell+(3m-s)] = 2s+1 \end{cases}$$

Limpando as cinco equações, temos:

$$\begin{cases} -4m+s+d+c+e+\ell = 0 \\ m-s=-6 \\ 6m-3s-e-\ell=0 \\ 3m-s-2e=0 \\ 3m-3s+\ell=1 \end{cases}$$

Das equações (ii) e (v), temos $\ell = 19$. Reorganizamos nossas cinco informações como segue:

$$\begin{cases} -4m+s+d+c+e = -19 \\ m-s=-6 \\ 6m-3s-e=19 \\ 3m-s-2e=0 \\ \ell=19 \end{cases}$$

Note que as três equações centrais, isto é, as equaçõe (ii), (iii) e (iv), envolvem apenas m, s e e:

$$\begin{cases} m-s=-6 \\ 6m-3s-e=19 \\ 3m-s-2e=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17 \\ s=23 \\ e=14 \end{cases}$$

Sabemos as idades atuais de Matias (17), Sófocles (23), Erastóstenes (14) e Lutero (19).

Sobre Dâmocles e César, só o que podemos saber (pela primeira equação) é que a soma de suas idades atuais é 12.

A resposta do problema é $s+m=40$

02. Suponha que a e b são raízes reais e diferentes da equação $4x^2 - 4tx - 1 = 0 \ (t \in \mathbb{R})$. O intervalo [$a$; b] é o domínio da função $f(x) = \frac{2x - t}{x^2 + 1}$. Seja $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$. Determine $g(0)$.

Solução:

Não há a menor necessidade de investigar todo o impacto do parâmetro t no problema, uma vez que ele pede apenas a diferença entre o máximo e o mínimo de $f(x)$ quando $t = 0$. Tomando, pois, $t = 0$, temos a equação quadrádica

$$4x^2 - 1 = 0$$

As raízes são $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. Com elas definimos o domínio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ da função

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Notamos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$ e que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$. Além disso, a derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - (2x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

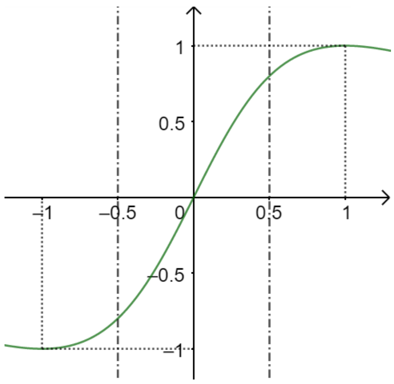
As raízes de $f'(x)$ são $x = -1$ e $x = 1$, que parecem ser um mínimo local e um máximo local, respectivamente, o que pode ser comprovado pela derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(-2x^2 + 2)'(x^4 + 2x^2 + 1) - (-2x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-4x)(x^4 + 2x^2 + 1) - (-2x^2 + 2)(4x^3 + 4x)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4x^5 - 8x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^4} \rightarrow \begin{cases} f''(-1) > 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases}$$

Toda essa análise permite ao aluno fazer o seguinte esboço do gráfico de $f(x)$, mesmo sem acesso a um sotware matemático:



Se $f(x)$ estivesse definido para todos os reais, seus valores máximo e mínimo seriam 1 e -1, respectivamente, atingidos quando $x = 1$ e quando $x = -1$. Acontece que estamos trabalhando apenas no domínio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, intervalo onde a função é estritamente crescente, de modo que o valor máximo procurado é $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ e o valor mínimo procurado é $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{5}$. Segue:

$$g(0) = \frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$g(0) = \frac{8}{5}$$

03. Em um triângulo de vértices *A*(0; 0), *B*(2; 4) e *C*(6; 0), toma-se um ponto variável *M* sobre o lado *AB*. Desse ponto, traça-se a perpendicular ao lado *AC* que intercepta em *Q*.
Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção das retas *BQ* e *CM* e escreva a sua equação.

Solução:

Sendo $M = (a; b)$ e $Q = (a; 0)$, sabemos que $0 < a < 2$. Usaremos a como nosso parâmetro de varredura.

Como a inclinação de AM é a mesma de AB, temos: $\frac{b}{a} = \frac{4}{2} \to b = 2a$

A reta $\overleftrightarrow{BQ}$ tem equação: $\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \to y = -\frac{4}{a-2}x + \frac{4a}{a-2}$

A reta $\overleftrightarrow{CM}$ tem equação: $\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ a & 2a & 1 \end{pmatrix} = 0 \to y = \frac{2a}{a-6}x - \frac{12a}{a-6}$

Fazendo o encontro das duas retas (ponto P):

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{a-2}x + \dfrac{4a}{a-2} \\ y = \dfrac{2a}{a-6}x - \dfrac{12a}{a-6} \end{cases} \to \begin{cases} x = 8 - \dfrac{24(a-4)}{a^2-12} \\ y = 4a\left(\dfrac{a-6}{a^2-12}\right) \end{cases}$$

As equações paramétricas acima, que para cada $a \in]0; 2[$ nos fornecem um ponto $P = (x; y)$ diferente, não são muito triviais de se digerir, ou seja, não são fáceis de se sumir com o parâmetro a. Para tal, isolaremos o parâmetro a ainda não equações das retas:

$$y = -\frac{4}{a-2}x + \frac{4a}{a-2} \to a = \frac{-4x+2y}{y-4}$$

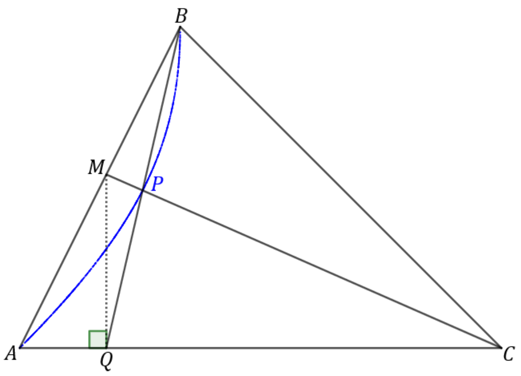
$$y = \frac{2a}{a-6}x - \frac{12a}{a-6} \to a = \frac{6y}{-2x+y+12}$$

Assim, a equação do LG procurado é

$$\frac{-4x+2y}{y-4} = \frac{6y}{-2x+y+12} \to 2x^2 - 2xy - y^2 - 12x + 12y = 0$$

Como $(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 4 & -2 & -12 \\ -2 & -2 & 12 \\ -12 & 12 & 0 \end{pmatrix} = 288 \neq 0$ e o LG não pode ser um conjunto vazio (pela estrutura do desenho do triângulo), concluímos que se trata de uma hipérbole.

No caso, como $0 < x < 2$, temos apenas um arco de hipérbole:

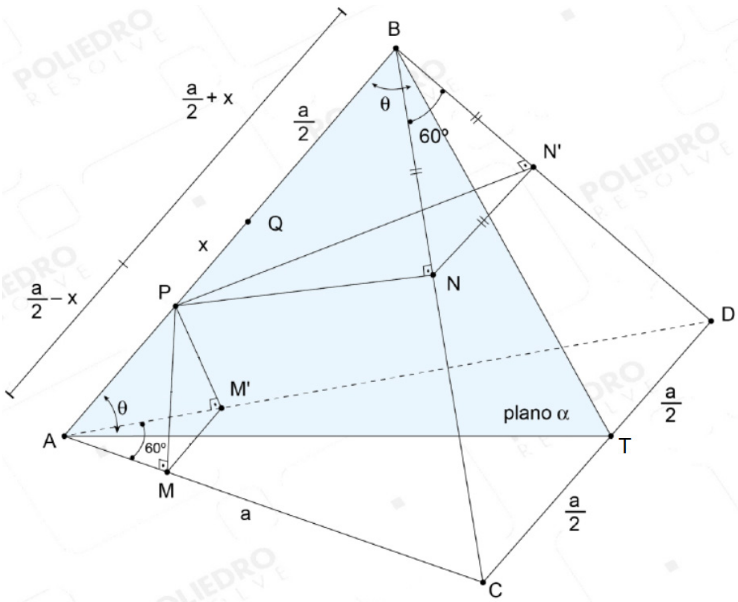


04. Seja um tetraedro regular *ABCD* de aresta *a* e o ponto *Q* médio de *AB*. O ponto *P* sobre a aresta *AB*, entre *Q* e *A*, é projetado nas arestas *AC* e *AD*, sobre os pontos *M* e *M'*, respectivamente, e também nas arestas *BC* e *BD*, sobre os pontos *N* e *N'*, respectivamente. O plano *MM'NN'* divide o tetraedro em dois volumes com razão de 1 para 4. Determine *QP* em função de *a*.

Solução:

(Crédito das imagens para os nossos parceiros do Poliedro)

Contemplemos a imagem do tetraedro abaixo, com destaque para o plano α definido pelos pontos A, B e T (médio de CD):



Como BN e BN' valem ambos $\left(\frac{a}{2}+x\right)\cos 60°$, então BNN' é equilátero e a reta BT (contida em α) é sua ceviana de simetria, encontrando NN' em seu ponto médio.

Como PN e PN' valem ambos $\left(\frac{a}{2}+x\right)\operatorname{sen} 60°$ então PNN' é isósceles. Como o plano α contém P e o ponto médio de NN', então α contém a ceviana de simetria de PNN'.

Como AM e AM' valem ambos $\left(\frac{a}{2}-x\right)\cos 60°$, então AMM' é equilátero e a reta AT (contida em α) é sua ceviana de simetria, encontrando MM' em seu ponto médio.

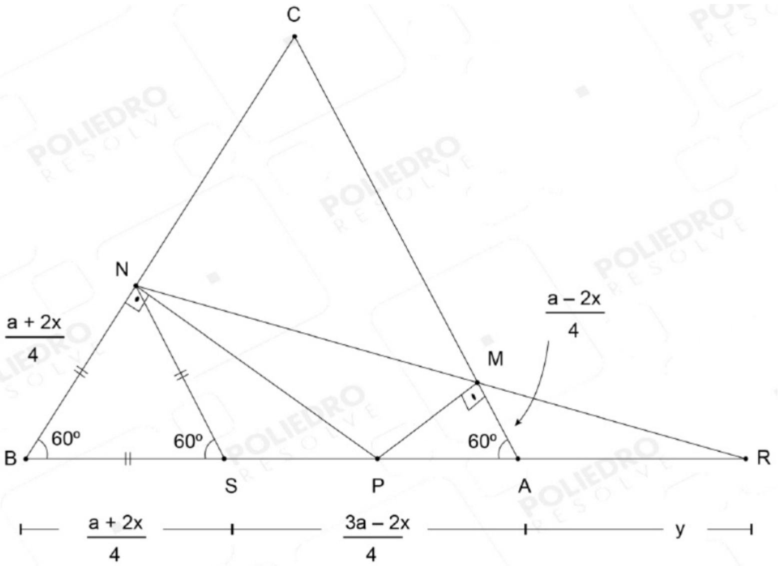
Como PM e PM' valem ambos $\left(\frac{a}{2}-x\right)\operatorname{sen} 60°$, então PMM' é isósceles. Como o plano α contém P e o ponto médio de MM', então α contém a ceviana de simetria de PMM'.

Todas as considerações acima foram feitas para mostrar como a figura é completamente simétrica em relação ao plano α, sendo ele essencial para a compreensão da figura.

É fato que α tem em CD uma direção normal (AT e BT são perpendiculares a CD). Como MM' e NN' são paralelos a CD (o que pode ser visto pelos triângulos formados nas faces ACD e BCD), então MM' e NN' são também normais a α, reforçando ainda mais o caráter de simetria do plano α.

Conhecemos o volume do tetraedro $V_T = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ e a altura do tetraedro $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, informação da qual temos $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, sendo θ o ângulo entre a aresta e a face do tetraedro (ângulo também marcado na figura).

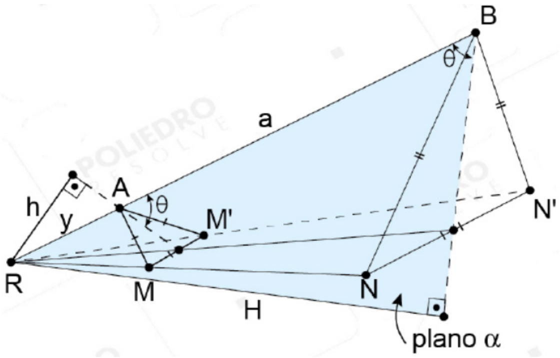
Sendo R o ponto de encontro do plano α com a reta AB, considere a figura abaixo, tirada do plano da face ABC:



S é o ponto de AB tal que BSN é equilátero. Da semelhança entre ARM e SRN temos que:

$$\frac{y}{y+\frac{3a}{4}-\frac{x}{2}}=\frac{\frac{a}{4}-\frac{x}{2}}{\frac{a}{4}+\frac{x}{2}}\rightarrow y=\frac{(a-2x)(3a-2x)}{16x}$$

Agora considere a figura abaixo:



O volume da pirâmide $RBNN'$ menos o volume da pirâmide $RAMM'$ é igual a $1/5$ do volume do tetraedro.

$$H=(a+y)\,\mathrm{sen}\,\theta \;\; ; \;\; h=y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{V_T}{5}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{4}+\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot H-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{4}-\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h$$

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{60}=\frac{\sqrt{3}}{192}(a+2x)^2(a+y)\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{192}(a-2x)^2y\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{60}=\frac{a\sqrt{2}}{192}(a^2+4ax+4x^2+8xy)$$

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{60}=\frac{a\sqrt{2}}{192}\left(a^2+4ax+4x^2+\frac{(a-2x)(3a-2x)}{2}\right)$$

$$60x^2=7a^2\rightarrow x=\frac{a\sqrt{105}}{30}$$

05. Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=ky \\ (1-k)x-y+4z=0 \\ 2x+u-kz=z \end{cases}$$

Determine o menor valor da constante real *k* que torna o sistema indeterminado. Para esse valor de *k*, encontre a solução *x, y, z* do sistema acima que minimiza o valor de $(x-z)^2+e^{x+y}-4|x|-2y$.

Solução:

Reescrevendo o sistema na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2-k & -1 \\ 1-k & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O determinante Δ da matriz incompleta do sistema é:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2-k & -1 \\ 1-k & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -k-1 \end{vmatrix}=k^3-2k^2-5k+6$$

Por inspeção de raízes racionais vemos que $\Delta=0$ quando $k=-2$, $k=1$ ou $k=3$

O menor valor que torna o sistema indeterminado é $k=-2$.

Para $k=-2$ o sistema fica: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como a primeira coluna é a soma das outras duas, vemos que as soluções do sistema são da forma

$$(x;y;z)=(-t;t;t)\ \ ;\ \ t\in\mathbb{R}$$

A expressão E que se espera minimizar é:

$$E=(x-z)^2+e^{x+y}-4|x|-2y$$

$$E=(-t-t)^2+e^{-t+t}-4|-t|-2t$$

$$E=4t^2-4|t|-2t+1$$

Para $t\geq 0$ temos $E=4t^2-6t+1$, cujo valor mínimo ocorre para $t=\frac{3}{4}$ e vale $E_{min}=-\frac{5}{4}$

Para $t<0$ temos $E=4t^2+2t+1$, cujo valor mínimo ocorre para $t=-\frac{1}{4}$ e vale $E_{min}=\frac{3}{4}$

Logo o menor de todos os valores de E ocorre para $t=\frac{3}{4}$, logo a solução procurada é $(x;y;z)=\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$

06. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ que corresponde à solução da equação:

$$4^{\log_2 \text{sen}(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0.$$

Solução:

A equação que se deseja solucionar é

$$4^{\log_2 \text{sen}(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0$$

Antes de qualquer coisa, precisamos determinar o conjunto universo, aquele no qual a expressão faz sentido.

A primeira condição a ser atendida é "$\text{sen}(x) > 0$", para que "$\text{sen}(x)$" seja um logaritmando válido.

O logaritmo que aparece na segunda parcela não cria restrição alguma, pois 2^y é um logaritmando válido para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

A terceira parcela nos dá "$x \neq 0$" como restrição, condição que já é atendida pela primeira.

Logo o nosso universo de possibilidades reais para x são aqueles nos quais $\text{sen}(x) > 0$.

Dentro desse universo, vamos à solução da equação:

$$4^{\log_2 \text{sen}(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0$$

$$\text{sen}^2(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|} = 0$$

$$|x| = -x$$

$$x \leq 0$$

O conjunto solução procurado é aquele onde $\text{sen}(x) > 0$ e $x \leq 0$, ou seja, é o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}_-^*\}$$

07. Sejam os pontos *a* e *b*, no plano complexo, representados pelos números $a = 9 + xi$ e $b = y + 3i$, onde *i* é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. O ponto *a* é a rotação de 30° do ponto *b* em torno da origem no sentido anti-horário. Determine o valor do produto *xy*.

Solução:

$$b(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = a$$

$$(y + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 9 + xi$$

$$(y + 3i)\left(\sqrt{3} + i\right) = 18 + 2xi$$

$$y\sqrt{3} + yi + 3i\sqrt{3} - 3 = 18 + 2xi$$

$$\left(y\sqrt{3} - 21\right) + \left(y + 3\sqrt{3} - 2x\right)i = 0$$

$$\begin{cases} y\sqrt{3} - 21 = 0 \\ y + 3\sqrt{3} - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5\sqrt{3} \\ y = 7\sqrt{3} \end{cases}$$

$$xy = 105$$

08. Em uma sala com 11 estudantes, um professor decidiu aplicar um trabalho dividindo aleatoriamente a turma em três grupos de 3 estudantes e um grupo de 2 estudantes. Sabendo que na turma há um casal, qual é a probabilidade de que o mesmo faça o trabalho junto?

Solução:

Imagine que o menino do casal seja o aluno A, a menina do casal seja a aluna B e que os outros nove alunos tenham códigos C, D, E, F, G, H, I, J e K.

Cada um dos 11! anagramas formados com as letras de A a K nos dá uma divisão dos grupos, como no exemplo abaixo:

$$AKHIBDCEFJG = AKH.IBD.CEF.JG$$

equivale a um trio $\{A; H; K\}$, um trio $\{B; D; I\}$, um trio $\{C; E; F\}$ e uma dupla $\{G; J\}$.

É óbvio que essa contagem nos dá os mesmos grupos diversas vezes. O anagrama $AKH.IBD.CEF.JG$, usado no exemplo, nos daria os mesmos grupos que $AHK.BID.CFE.GJ$, $IBD.AKH.CEF.JG$, $FEC.KAH.DIB.GJ$, etc.

Mas isso não tem problema. Desde que contemos os casos possíveis e os casos favoráveis usando esse mesmo critério de contagem, está tudo certo.

O total de casos possíveis é, então, imediato: $11!$

Os casos favoráveis são aqueles onde as letras A e B aparecem nas posições $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(4; 5)$, $(4; 6)$, $(5; 6)$, $(7; 8)$, $(7; 9)$, $(8; 9)$ ou $(10; 11)$.

São 10 pares de posições favoráveis para as letras A e B.

Para cada um desses 10 pares nós temos 2 formas de preencher as letras A e B nessas posições.

Uma vez preenchidas as letras A e B nas suas posições favoráveis, temos 9! formas diferentes de preencher os outros nove alunos nas posições restantes.

O total de casos favoráveis é, portanto: $10 \cdot 2 \cdot 9! = 2 \cdot 10!$

A probabilidade do casal ficar junto é, finalmente:

$$\frac{2 \cdot 10!}{11!} = \frac{2}{11}$$

09. Sabendo-se que $\frac{\text{sen}^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$ com $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $a+b\neq 0$, determine $\frac{\text{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}$ em função de *a* e *b* somente.

Solução:

Utilizando a Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^4\alpha=(\text{sen}^2\alpha)^2=(1-\cos^2\alpha)^2$$

$$\text{sen}^4\alpha=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$

Substituindo na condição fornecida no enunciado, temos:

$$\frac{1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{b-2b\cos^2\alpha+b\cos^4\alpha+a\cos^4\alpha}{ab}=\frac{1}{a+b}$$

$$ab+b^2-2b(a+b)\cos^2\alpha+(a+b)^2\cos^4\alpha=ab$$

$$(a+b)^2\cos^4\alpha-2b(a+b)\cos^2\alpha+b^2=0$$

O resultado acima corresponde a um trinômio do quadrado perfeito. Logo:

$$[(a+b)\cos^2\alpha-b]^2=0 \quad\rightarrow\quad \cos^2\alpha=\frac{b}{a+b}$$

Como $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, então:

$$\text{sen}^2\alpha=\frac{a}{a+b}$$

Substituindo na expressão a ser calculada, temos:

$$\frac{\text{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4}{a^3}+\frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^4}{b^3}$$

$$\frac{\text{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}$$

Portanto, obtém-se:

$$\frac{\text{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

10. Seja um triângulo acutângulo ΔABC onde h_B e h_C são as alturas dos vértices B e C, respectivamente, e $\overline{BC} = a$. Sabendo-se que $\frac{h_B h_C}{a_2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ e $\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \frac{p}{p\sqrt{m}}$, calcule $p+q+m$.

Dados:
- p, q e m são números naturais;
- p e q são primos entre si; e
- m é o menor possível.

Solução:

Sendo

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h_C}{a}$ e $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h_B}{a}$, temos $\frac{h_B h_C}{a^2} = \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}$.

Pelo enunciado, então: $\operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Sabendo que $\cos(\hat{B}+\hat{C}) = \cos\hat{B}\cos\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}$ e que $\cos\hat{A} = \cos(180° - \hat{B} - \hat{C}) = -\cos(\hat{B}+\hat{C})$, segue:

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = -\cos(\hat{B}+\hat{C}) + \cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C} + \cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \operatorname{sen}\hat{B}\operatorname{sen}\hat{C}$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

Temos $p = 3$, $q = 2$ e $m = 6$, de modo que $p + q + m = 11$